Họ tên: Nguyễn Thị Hạnh (10/4/1993)
Nguyễn Thị Thanh Thủy
Lớp: K56A2 Toán - Tin



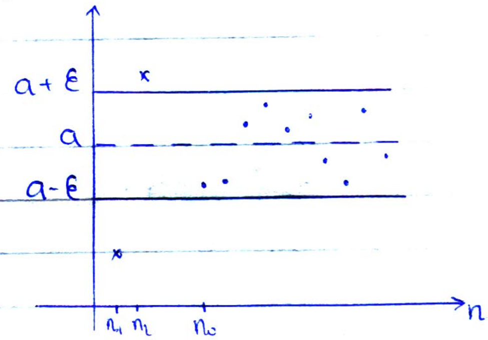
# BÀI TỔNG HỢP KIẾN THỨC VỀ DÃY

## I> Định nghĩa - hình ảnh minh họa

1 a) Dãy hội tụ đến a

- Định nghĩa:

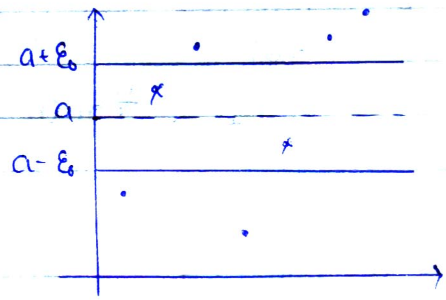
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) : |u_n - a| < \varepsilon, \forall n > n_0$




b) Dãy không hội tụ đến a:

- Định nghĩa:

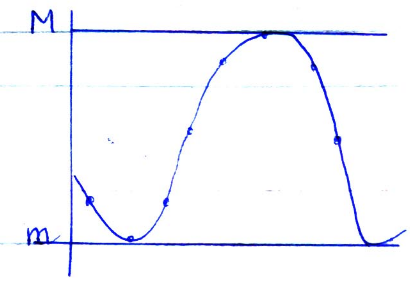
$\exists \varepsilon_0, \{u_{n_k}\} : |u_{n_k} - a| > \varepsilon_0$




2 a) Dãy bị chặn

- Định nghĩa

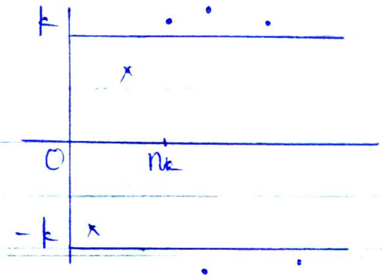
$\forall M > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n| \leq M$




b) Dãy không bị chặn

- Định nghĩa

$\forall K, \exists n_k : |u_{n_k}| > k$

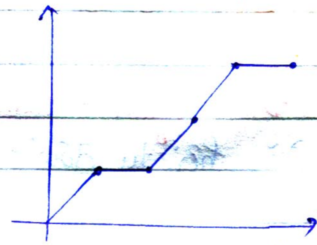


## ③ Dãy đơn điệu

a) i) Dãy đơn điệu tăng

- Định nghĩa:

$\forall m > n: (u_m - u_n)(m-n) \geq 0$

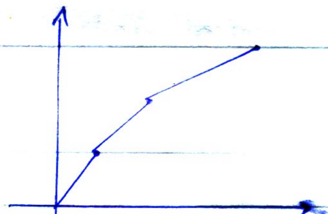


ii) Dãy tăng thực sự

- Định nghĩa:

$\exists m_1, n_1:$

$(u_{m_1} - u_{n_1})(m_1 - n_1) > 0$

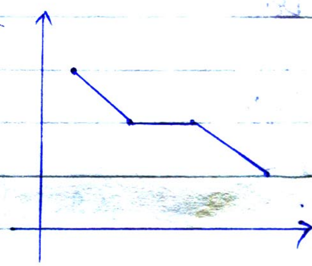


b) i) Dãy đơn điệu giảm

- Định nghĩa:

$\cancel{\exists m_2, n_2}: \forall m < n$

$(u_m - u_n)(m-n) \leq 0$

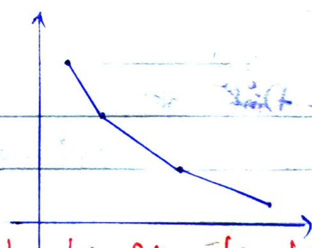


ii) Dãy giảm thực sự

- Định nghĩa

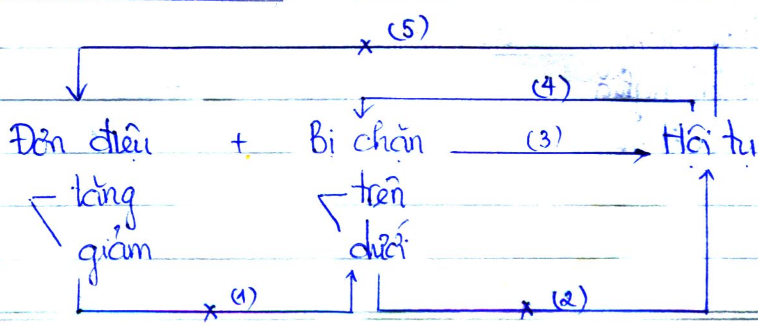
$\exists m_2, n_2:$

$(u_{m_2} - u_{n_2})(m_2 - n_2) < 0$



## II) Mối liên hệ giữa các dãy: hội tụ, bị chặn, đơn điệu.

### ① Sơ đồ mối liên hệ



② Các ví dụ minh họa.

(1) Đơn điệu không suy ra bị chặn.

$\boxed{VD}$: Dãy $u_n = n$ đơn điệu tăng nhưng không bị chặn

(2) Bị chặn không suy ra hội tụ.

$\boxed{VD}$: Dãy $\{u_n\} = (-1)^n$

Xét $\{u_n\} = \{u_{2k}\} \cup \{u_{2k+1}\}$ $(k = 1, 2, \dots)$

Thấy: $\{u_{2k}\} = (-1)^{2k} \to 1$

$\{u_{2k+1}\} = (-1)^{2k+1} \to -1$

$\Rightarrow \{u_n\}$ bị chặn trên bởi $1$

bị chặn dưới bởi $-1$

nhưng không suy ra hội tụ

(3) Dãy đơn điệu (tăng, giảm) + bị chặn (trên, dưới) $\Rightarrow$ hội tụ

$\boxed{VD_1}$: $a_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ $(n = 1, 2, \dots)$

+ Xét: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1, \forall n.$

$\Rightarrow \{a_n\}$ là dãy đơn điệu tăng (1)

+ Có $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \ \forall n$

$\Rightarrow n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1$

$\Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$

Ta có: $\ln a_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ (*)

$\Rightarrow VP_{(*)} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$

$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1$

$\Rightarrow \ln a_n < 1 \Rightarrow a_n < e.$

Vậy $\{a_n\}$ bị chặn trên bởi $e$ (2)

Từ (1) và (2), theo đ/l Weierstrass về sự tồn tại giới hạn của dãy đơn điệu bị chặn thì tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \{a_n\}$ hội tụ

$\boxed{VD_2}$: $u_n = \frac{1}{n}$.

\+ Xét $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \{u_n\}$ là dãy đơn điệu giảm. ①

\+ lại thấy: $\frac{1}{n} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \{\frac{1}{n}\}$ bị chặn dưới bởi 0 ②.

Từ ① và ② theo định lý Weierstrass ta suy ra được dãy $\{u_n\}$ là dãy hội tụ

(4) Hội tụ suy ra bị chặn.

$\boxed{VD}$: Dãy $u_n = \frac{1}{n}$

Thấy $\{\frac{1}{n}\} \to 0$ khi $n \to +\infty$.

$u_n = \frac{1}{n} < 1 \Rightarrow \{u_n\}$ bị chặn trên bởi 1 ①

$u_n = \frac{1}{n} > 0 \Rightarrow \{u_n\}$ bị chặn dưới bởi 0 ②.

Từ ① và ② suy ra $\{u_n\}$ bị chặn.

(5) Hội tụ không suy ra đơn điệu

$\boxed{VD}$: $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Thấy $\{u_n\} \to 0$ khi $n \to +\infty$

Mặt khác: xét:

$$u_n = \left\{\frac{(-1)^{2k}}{2k}\right\} \cup \left\{\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}\right\} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Thấy: $\begin{cases} \left\{\frac{(-1)^{2k}}{2k}\right\} = \left\{\frac{1}{2k}\right\} & \text{đơn điệu giảm} \\ \left\{\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}\right\} = \left\{\frac{-1}{2k+1}\right\} & \text{đơn điệu tăng} \end{cases}$

$\Rightarrow \{u_n\}$ không đơn điệu

## ⟨III⟩ Tính chất của dãy hội tụ.

① Mọi dãy hội tụ đều có giới hạn duy nhất

② Mọi dãy con của dãy hội tụ là dãy hội tụ và có cùng giới hạn với giới hạn của dãy ban đầu.

$\boxed{VD}$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Xét $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ là dãy con của $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Khi đó: ~~lim~~ $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ là dãy hội tụ

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

③ Nếu $\{u_n\}_n$ là dãy hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ thì $\{|u_n|\}_n$ cũng là dãy hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = |a|$.

$\boxed{VD}$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n+2}{n+1} = -1$

Ta cần c/m: $\left\{\left|\frac{-n+2}{n+1}\right|\right\}$ là dãy hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{-n+2}{n+1}\right| = |-1| = 1$

Thật vậy, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0(\varepsilon)$:

$\left|\left|\frac{-n+2}{n+1}\right| - |-1|\right| < \varepsilon$, $\forall n > n_0$

$\Leftrightarrow \left|\frac{-3}{n+1}\right| < \varepsilon$, $\forall n > 2$ $\Leftrightarrow \frac{3}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$

Chọn $n_0 = \left[\frac{3}{\varepsilon} - 1\right] + 3 \Rightarrow \forall n > n_0$, $\exists n_0 = \left[\frac{3}{\varepsilon} - 1\right] + 3$:

$\left|\frac{-n+2}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$

Theo định nghĩa: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{-n+2}{n+1}\right| = 1$ (đpcm)

④ Mọi dãy hội tụ là dãy bị chặn.

$\boxed{VD}$: Xét: $u_n = \frac{1}{n}$.

Khi đó: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Ta cần CM: $\{u_n\}$ bị chặn.

Thật vậy: $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $0 < \frac{1}{n} < 1$.

$\Rightarrow \left\{\frac{1}{n}\right\}$ là dãy $\begin{cases} \text{bị chặn trên bởi } 1 \\ \text{bị chặn dưới bởi } 0 \end{cases}$

Suy ra $u_n = \frac{1}{n}$ là dãy bị chặn (đpcm)

(*) Một số ví dụ về trường hợp đặc biệt

VD1. Nếu $\exists \lim_{n\to\infty} |u_n| = a$ thì chưa chắc tồn tại $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ $(a \neq 0)$

$\boxed{VD}$ Cho dãy $u_n = (-1)^n$.

Thấy: $|u_n| = |(-1)^n| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |u_n| = 1$.

Nhưng $u_n = (-1)^n$ lại không hội tụ

VD2. Nếu $\exists \lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$ thì $\exists \lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

(Thật vậy: ta có thể cm bằng định lý kẹp như sau:

thấy: $-|u_n| \leq u_n \leq |u_n|$

Nếu: $|u_n| \to 0 \Rightarrow -|u_n| \to 0$

$\Rightarrow u_n \to 0$ )

$\boxed{VD_1}$. Cho dãy $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

- Thấy $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| \to 0$ khi $n \to \infty$.

và $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$ khi $n \to \infty$.

$\boxed{VD_2}$: $v_n = \frac{\sin n}{n} \to 0$

$\frac{-1}{n} \leq |v_n| = \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n}$

Mà $\begin{cases} \frac{-1}{n} \to 0 \\ \frac{1}{n} \to 0 \end{cases} \Rightarrow \left|\frac{\sin n}{n}\right| \to 0$

Date No.

## IV) Các phép toán trên dãy hội tụ

Giả các dãy $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ hội tụ. Khi đó:

1) $\{u_n \pm v_n\}$ hội tụ & $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n \pm v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} v_n$

2) $\{u_n . v_n\}$ hội tụ & $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n . v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n . \lim\limits_{n\to\infty} v_n$

3) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = b \neq 0$ thì $\left\{\dfrac{u_n}{v_n}\right\}$ hội tụ và

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to\infty} v_n}$$

⚠ Các chứng minh xem sách giáo trình giải tích 1 - Tr 40 + 41

(*) Các ví dụ minh họa

VDụ: Cho $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

1) *) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{n}{2n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n+1}{2n^2+n} = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = 0 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{n}{2n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1}$ (đpcm)

*) $\lim\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{n}{2n+1}\right)$ hoàn toàn tương tự $\Rightarrow$ đpcm

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n} . \dfrac{n}{2n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n+1} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} . \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = 0 . \dfrac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n} . \dfrac{n}{2n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} . \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1}$ (đpcm)

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}:\frac{n}{2n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2}=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}:\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=0:\frac{1}{2}=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}:\frac{n}{2n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}:\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}$ (đpcm)

## V) Mối liên quan giữa dãy hội tụ với dãy phân kỳ

① Giả sử $\begin{cases} u_n \text{ hội tụ} \\ v_n \text{ phân kỳ}\end{cases}$ thì $(u_n \pm v_n)$ phân kỳ.

VD4:

(*) $\begin{cases} u_n = \frac{1}{n} \to 0 \text{ khi } n\to\infty \\ v_n = n \text{ phân kỳ.}\end{cases}$

Xét $u_n + v_n = n + \frac{1}{n} = \frac{n^2+1}{n} \to +\infty$

Suy ra $(u_n + v_n)$ phân kỳ (đpcm)

(*) Chứng minh $(u_n - v_n)$ tương tự.

② Giả sử $\begin{cases} u_n \text{ hội tụ} \\ v_n \text{ phân kỳ}\end{cases}$ xét các trường hợp $\{u_n . v_n\}$

VD4.1 a) Un hội tụ đến 0

Cho $\begin{cases} u_n = \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ khi } n\to\infty \\ v_{1n} = n \quad \text{hội tụ ra vô cùng} \\ v_{2n} = n^2 \quad \text{hội tụ ra vô cùng} ; v_{3n} = \sqrt{n}\,(-1)^n \text{ hội tụ ra vô cùng} \\ v_{3n} = (-1)^n . n \quad \text{phân kỳ dđ không bị chặn} ; v_{4n} = (-1)^n \text{ pkỳ dđ bị chặn}\end{cases}$

(*) Xét $u_n . v_{1n} = \frac{1}{n+1} . n = \frac{n}{n+1} \to 1$

Suy ra $\{u_n . v_{1n}\}$ hội tụ.

(*) Xét $u_n . v_{3n} = \frac{1}{n+1} . (-1)^n . n = \frac{(-1)^n . n}{n+1}$ . phân kỳ dao động bị chặn

(*) Xét $u_n . v_{3n} = \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1} \to 0$

Suy ra $\{u_n . v_{3n}\}$ hội tụ về 0

(*) Xét $u_n . v_2 n = \frac{1}{n+1} . n^2 = \frac{n^2}{n+1} \to +\infty$

Suy ra $\{u_n . v_n\}$ phân kỳ

(*) Xét $u_n . v_4 n = \frac{1}{n+1} . (-1)^n = \frac{(-1)^n}{n+1} \to 0$

Suy ra $\{u_n . v_{4n}\}$ hội tụ về 0

VD 2: b) Hội tụ đến $a \neq 0$

Cho $u_n = \frac{n+1}{n} \to 1$ khi $n \to \infty$

$v_{1n} = n$ hội tụ ra vô cùng

$v_{2n} = (-1)^n$ phân kỳ dao động bị chặn

$v_{3n} = (-1)^n . n$ phân kỳ dđ không bị chặn

(*) Xét $u_n . v_{1n} = \frac{n+1}{n} . n = n+1 \to +\infty$

Suy ra $\{u_n . v_{1n}\}$ phân kỳ

(*) Xét $u_n . v_{2n} = \frac{n+1}{n} . (-1)^n = \frac{(-1)^n . n+1}{n}$

bị chặn dưới bởi 0

chặn trên bởi 3/2

Suy ra $\{u_n . v_{2n}\}$ phân kỳ dao động bị chặn

(*) Xét $u_n . v_{3n} = \frac{n+1}{n} . (-1)^n . n = (-1)^n(n+1) \to \infty$

Suy ra $\{u_n . v_{3n}\}$ phân kỳ.

Từ các ví dụ minh họa trên ta có kết luận sau:

+) $u_n \to 0$, $v_n$ pkỳ dđ không bị chặn $\Rightarrow \{u_n . v_n\}$ phân kỳ dđ không bị chặn

HONG HA

Date No.

+) $\begin{cases} u_n \to 0 \\ v_n \to \infty \end{cases} \Rightarrow \{u_n . v_n\}$ $\left[\begin{array}{l} \text{hội tụ} \\ \text{phân kỳ} \end{array}\right.$

+) $\begin{cases} u_n \to 0 \\ v_n \text{ pkỳ đdt bị chặn} \end{cases} \Rightarrow \{u_n . v_n\} \to 0$

+) $\begin{cases} u_n \to a \neq 0 \\ v_n \text{ phân kỳ} \end{cases} \Rightarrow \{u_n . v_n\}$ phân kỳ.

③ Giả $\begin{cases} u_n \text{ phân kỳ} \\ v_n \text{ phân kỳ} \end{cases}$ Xét $\left[\begin{array}{ll} (u_n + v_n) & (1) \\ (u_n . v_n) & (2) \end{array}\right.$

VD: a) Cho: $\begin{cases} u_n = n & \text{hội tụ ra vô cùng} \\ \left[\begin{array}{ll} v_{1n} = -n+1 & \text{hội tụ ra vô cùng} \\ v_{2n} = n+1 & \text{hội tụ ra vô cùng} \\ v_{3n} = (-1)^n . n & \text{pkỳ đdt bị chặn} \\ v_{4n} = (-1)^n & \text{pkỳ đdt bị chặn.} \end{array}\right. \end{cases}$

(1) (*) Xét $u_n + v_{1n} = n + (-n+1) = 1$

Suy ra $\{u_n + v_{1n}\}$ hội tụ đến 1

(*) Xét $u_n + v_{2n} = n + n + 1 = 2n + 1 \to +\infty$

Suy ra $\{u_n + v_{2n}\}$ phân kỳ hội tụ ra vô cùng

(*) Xét $u_n + v_{3n} = n + (-1)^n . n \to +\infty$

Suy ra $\{u_n + v_{3n}\}$ phân kỳ hội tụ ra vô cùng

(*) Xét $u_n + v_{4n} = n + (-1)^n \to +\infty$

Suy ra $\{u_n + v_{4n}\}$ phân kỳ hội tụ ra vô cùng

(2) (*) Xét $u_n . v_{1n} = n(-n+1) = -(n^2 - n) \to -\infty$

Suy ra $\{u_n . v_{1n}\}$ phân kỳ hội tụ ra vô cùng

(*) Xét $u_n . v_{2n} = n(n+1) = n^2 + n \to +\infty$

Suy ra $\{u_n . v_{2n}\}$ phân kỳ hội tụ ra vô cùng

(*) Xét $u_n . v_{3n} = n(-1)^n . n = n^2 . (-1)^n \to \infty$

Suy ra $\{u_n . v_{3n}\}$ phân kỳ hội tụ ra vô cùng

(*) Xét $u_n . v_{4n} = n(-1)^n \to \infty$

Suy ra $\{u_n . v_{3n}\}$ phân kỳ hội tụ ra vô cùng

b) Cho $\begin{cases} u_n = (-1)^n & \text{phân kỳ dđt bị chặn} \\ \left[\begin{array}{ll} v_{1n} = n+1 & \text{hội tụ ra vô cùng} \\ v_{2n} = (-1)^n . n & \text{phân kỳ dđt không bị chặn} \\ v_{3n} = (-1)^n & \text{phân kỳ dđt bị chặn.} \end{array}\right. \end{cases}$

(1) (*) Xét $u_n + v_{1n} = (-1)^n + n + 1 \to \infty$

Suy ra $\{u_n + v_{1n}\}$ phân kỳ hội tụ ra vô cùng

(*) Xét $u_n + v_{2n} = (-1)^n + (-1)^n . n = (-1)^n (1+n) \to \infty$

Suy ra $\{u_n + v_{2n}\}$ phân kỳ hội tụ ra vô cùng

(*) Xét $u_n + v_{3n} = (-1)^n + (-1)^n = 2.(-1)^n$

bị chặn trên bởi 2
chặn dưới bởi $-2$ } suy ra $\{u_n + v_{3n}\}$ phân kỳ dđt bị chặn.

(2) (*) Xét $u_n . v_{1n} = (-1)^n (n+1) \to \infty$

Suy ra $\{u_n . v_{1n}\}$ phân kỳ hội tụ ra vô cùng

(*) Xét $u_n v_{2n} = (-1)^n . (-1)^n \; n = n \to +\infty$

Suy ra $\{u_n . v_{2n}\}$ phân kỳ hội tụ ra vô cùng

(*) Xét $u_n . v_{3n} = (-1)^n (-1)^n = 1$

Suy ra $\{u_n . v_{3n}\}$ phân kỳ hội tụ đến 1

Từ các ví dụ minh họa ta có kết luận sau:

+) $\begin{cases} u_n \to \infty \\ v_n \to \infty \end{cases} \Rightarrow \{u_n \pm v_n\}$ [ hội tụ / phân kỳ

+) $\begin{cases} u_n \to \infty \\ v_n \text{ phân kỳ } \left[\begin{array}{l} \text{dđt bị chặn} \\ \text{dđt không bị chặn} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \{u_n \pm v_n\}$ phân kỳ hội tụ ra vô cùng

+) $\begin{cases} u_n \to \infty \\ v_n \text{ phân kỳ} \end{cases} \Rightarrow \{u_n . v_n\}$ phân kỳ hội tụ ra vô cùng

+) $\begin{cases} u_n \text{ phân kỳ dđt bị chặn} \\ \left[\begin{array}{l} v_n \to \infty \\ v_n \text{ phân kỳ dđt không bị chặn} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \{u_n \pm v_n\}$ phân kỳ hội tụ ra vô cùng
$\{u_n . v_n\}$ phân kỳ hội tụ ra vô cùng

+) $\begin{cases} u_n \text{ phân kỳ dđt bị chặn} \\ v_n \text{ phân kỳ dđt bị chặn} \end{cases} \Rightarrow \{u_n \pm v_n\}$ phân kỳ hội tụ đến a
$\{u_n . v_n\}$ phân kỳ hội tụ đến a.

Date . . . No.

## VI) Mối quan giữa dãy bị chặn & dãy không bị chặn

(1) Gsử $\begin{cases} u_n \text{ bị chặn} \\ v_n \text{ bị chặn} \end{cases}$ thì
a) $(u_n \pm v_n)$ bị chặn
b) $(u_n v_n)$ bị chặn
c) $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ không biết

Vdụ: Cho $\begin{cases} u_n = (-1)^n \\ v_{1n} = (-1)^n \\ v_{2n} = \dfrac{1}{n} \end{cases}$ là các dãy bị chặn

a) Xét $u_n + v_{1n} = (-1)^n + (-1)^n = 2.(-1)^n$
bị chặn trên bởi 2
chặn dưới bởi −2
Suy ra $(u_n + v_n)$ bị chặn
$(u_n - v_n)$ tương tự

b) Xét $u_n . v_{2n} = (-1)^n . \dfrac{1}{n} = \dfrac{(-1)^n}{n}$

bị chặn trên bởi 1
chặn dưới bởi −1
Suy ra $(u_n . v_{2n})$ bị chặn

c) Xét $\dfrac{u_n}{v_{2n}} = \dfrac{(-1)^n}{\frac{1}{n}} = n.(-1)^n \to \infty$

+) Suy ra $\left(\dfrac{u_n}{v_{2n}}\right)$ không bị chặn

+) Xét $\dfrac{u_n}{v_{1n}} = \dfrac{(-1)^n}{(-1)^n} = 1$

Suy ra $\left(\dfrac{u_n}{v_{1n}}\right)$ bị chặn.

(2) Gsử $\begin{cases} u_n \text{ bị chặn} \\ v_n \text{ không bị chặn} \end{cases}$ thì
a) $(u_n \pm v_n)$ không bị chặn
b) $(u_n v_n)$ không biết
c) $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ không biết

Date . . . No.

**Ví dụ:**

Cho $\begin{cases} u_n = (-1)^n & \text{bị chặn} \\ v_n = n & \text{không bị chặn} \end{cases}$

a) Xét $u_n + v_n = (-1)^n + n \to +\infty$

Suy ra $(u_n + v_n)$ không bị chặn

b) Xét $u_n . v_n = (-1)^n . n \to +\infty$

+) Suy ra $(u_n . v_n)$ không bị chặn

+) Cho $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{n} & \text{bị chặn} \\ v_n = \sqrt{n} & \text{không bị chặn} \end{cases}$

Xét $u_n . v_n = \dfrac{1}{n} . \sqrt{n} \to 0$

Suy ra $\{u_n v_n\}$ bị chặn

c) Cho $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{n} & \text{bị chặn} \\ \left[\begin{array}{l} v_{1n} = n \quad \text{không bị chặn} \\ \begin{cases} v_{2k} = n \\ v_{2k+1} = \dfrac{1}{n^2} \end{cases} \text{không bị chặn} \end{array}\right. \end{cases}$

+) Xét $\dfrac{u_n}{v_{1n}} = \dfrac{1}{n.n} = \dfrac{1}{n^2}$ bị chặn

Suy ra $\left(\dfrac{u_n}{v_{1n}}\right)$ bị chặn

+) Xét $\dfrac{u_n}{v_{2k+1}} = \dfrac{1}{n} : \dfrac{1}{n^2} = n \to \infty$

Suy ra $\left(\dfrac{u_n}{v_{2k+1}}\right)$ không bị chặn

Hay $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ không bị chặn.

③ Giả $\begin{cases} u_n \text{ không bị chặn} \\ v_n \text{ không bị chặn} \end{cases}$ thì a) $(u_n \pm v_n)$ không bị chặn

b) $(u_n . v_n)$ không biết

c) $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ không biết.

HONG HA

Date . . . No.

**VD:** a) Cho $\begin{cases} u_n = \sqrt{n} \\ v_n = n \end{cases}$ không bị chặn

Xét $u_n + v_n = \sqrt{n} + n \to \infty$

Suy ra $(u_n + v_n)$ không bị chặn

b) +) Cho $\begin{cases} u_n = n \\ v_n = \sqrt{n} \end{cases}$ không bị chặn

Xét $u_n . v_n = n\sqrt{n} \to +\infty$

Suy ra $\{u_n . v_n\}$ không bị chặn

+) Cho $u_n : \begin{cases} u_{2k} = n \\ u_{2k+1} = \dfrac{1}{n} \end{cases}$ $v_n \begin{cases} v_{2k} = \dfrac{1}{n} \\ v_{2k+1} = n \end{cases}$

Xét $u_{2k} . v_{2k} = n . \dfrac{1}{n} = 1$

Suy ra $(u_{2k} . v_{2k})$ ~~kl~~ bị chặn

Hay $(u_n . v_n)$ bị chặn.

c) +) Cho $\begin{cases} u_n = n \\ v_n = \sqrt{n} \end{cases}$ không bị chặn

Xét $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty$

Suy ra $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ không bị chặn

+) Cho $\begin{cases} u_n = n \\ v_n = n^2 \end{cases}$ không bị chặn

Xét $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$ bị chặn trên bởi 1, chặn dưới bởi 0

Suy ra $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ bị chặn.