Математические заметки

том 62 выпуск 1 июль 1997

УДК 517

ЧЕТЫРЕ КОНТРПРИМЕРА К ТЕОРЕМЕ ФУБИНИ

А. В. Угланов

Работа относится к теории знаконеопределенных мер. Главные результаты: теорема Фубини в общем виде не верна; жордановы составляющие переходной меры не обязаны быть переходными мерами; операция взятия жордановых составляющих не обязана коммутировать с операцией умножения на начальную меру; произведение σ-ограниченных мер может не быть σ-ограниченной мерой.

Библиография: 2 названия.

В работе [1] в весьма общей форме была доказана теорема Фубини; грубо говоря, теорема устанавливает равенство

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\nu\times\mu(dx,dy)=\int_X\left[\int_Y f(x,y)\nu(x,dy)\right]\mu(dx). \tag{1}$$

Здесь X, Y – измеримые пространства, f – вектор-функция на $X\times Y$, ν – переходная мера из X в Y, μ – вектор-мера на X. (Одна из мер ν, μ должна быть скалярной. В настоящей работе вектор-меры и функции затрагиваться не будут, поэтому точных определений и формулировок мы не приводим. Необходимые же скалярные понятия будут даны.) Но если в скалярном знакопостоянном случае (ν, μ – скалярные неотрицательные меры, f – скалярная функция) теорема Фубини доказывается просто, причем в исчерпывающей общности (X, Y – произвольные измеримые пространства, ν, μ – произвольные меры), то в векторном случае доказательство достаточно сложно и, главное, пришлось делать специальные предположения относительно X, Y, ν, μ. В [1] отмечалось, что вопрос о справедливости теоремы Фубини в общем случае остается открытым. Приводимый ниже пример 1 дает отрицательный ответ на этот вопрос: уже в скалярном, но знакопеременном случае теорема Фубини в общем виде неверна. Примеры 2, 3, фактически также опровергающие этот вид теоремы Фубини, носят более общий характер; они дают отрицательный ответ на интересные и давно стоявшие вопросы: должны ли жордановы составляющие переходной меры быть переходными мерами? Если составляющие все же являются переходными мерами, то должна ли операция взятия составляющих коммутировать с операцией произведения переходной меры на начальную? Несколько особняком стоит пример 4: хотя он и не опровергает теорему Фубини, но показывает, что пользоваться ей нужно с известной осторожностью: произведение σ-ограниченных мер может не быть σ-ограниченной мерой.

Уточним используемые в статье понятия. Пусть (x,Σ_X), (Y,Σ_Y) – измеримые пространства, (Σ_X, Σ_Y – σ-алгебры). Мерой (числовой) на X называется счетно-аддитивная функция $\mu\colon\Sigma_X\to\mathbb{R}^1$; положительной мерой на X называется счетно-аддитивная

© А. В. Угланов 1997

функция $\mu\colon \Sigma_X \to [0,\infty]$ (т.е. μ может принимать значение $+\infty$). Переходной (положительной переходной) мерой из X в Y называется функция $\nu\colon X \times \Sigma_Y \to \mathbb{R}^1$ (соответственно, $\nu\colon X\times\Sigma_Y \to [0,\infty]$), удовлетворяющая условиям:

1) при любом $x \in X$ функция $\nu(x,\,\cdot\,)$ есть мера (положительная мера) на X;
2) при любом $A \in \Sigma_Y$ функция $\nu(\,\cdot\,,A)$ измерима.

Множество мер на X обозначим через $M(X)$, множество переходных мер из X в Y обозначим через $M(X,Y)$; такой же смысл для соответствующих положительных объектов имеют обозначения $M^+(X)$, $M^+(X,Y)$.

Для $\mu \in M(X)$ через $|\mu| \in M(X)$ будем обозначать меру, являющуюся полным изменением меры μ. Все рассматриваемые ниже интегралы – лебеговы; при этом функция $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ называется μ-интегрируемой, если она $|\mu|$-интегрируема, интеграл $\int_X f\,d\mu$ определяется естественным образом как разность интегралов по положительной и отрицательной (жордановым) частям меры μ.

Для $x \in X$, $A \subset X\times Y$ положим $S_x(A) = \{y \in Y : (x,y) \in A\}$. Предположим, меры $\mu \in M(X)$ и $\nu \in M(X,Y)$ таковы, что при любом $A \in \Sigma_X \times \Sigma_Y$ функция $x \mapsto \nu\big(x, S_x(A)\big)$ (автоматически являющаяся Σ_X-измеримой) μ-интегрируема; тогда положим

$$\nu\times\mu\colon \Sigma_X\times\Sigma_Y \to \mathbb{R}^1 : A \mapsto \int_X \nu\big(x, S_x(A)\big)\mu(dx). \tag{2}$$

Известно [1], что функция $\nu\times\mu$ есть мера на $X\times Y$.

Напомним еще, что σ-алгебра называется сепарабельной, если она порождается некоторым счетным семейством множеств.

Переформулируем теперь применительно к скалярному случаю результат из [1].

Теорема (Фубини). *Пусть Σ_Y – сепарабельная σ-алгебра, $\mu\in M(X)$, $\nu\in M(X,Y)$, произведение $\nu\times\mu$ определено и функция $f\colon X\times Y \to [-\infty,\infty]$ является $\nu\times\mu$-интегрируемой. Тогда $|\mu|$-почти при всех x функция $y\mapsto f(x,y)$ $\nu(x,\,\cdot\,)$-интегрируема, функция*

$$x \mapsto \int_Y f(x,y)\nu(x,dy)$$

μ-интегрируема и справедливо равенство (1).

При доказательстве теоремы существенно использовались установленные в [1] (в предположениях теоремы) соотношения

$$|\nu| \in M(X,Y), \tag{3}$$
$$|\nu\times\mu| = |\nu|\times|\mu|. \tag{4}$$

Среди условий теоремы (и подавно соотношений (3), (4)) лишним может быть только одно – условие сепарабельности Σ_Y; мы покажем, что опустить это условие нельзя. Далее везде (кроме замечания после примера 3): $X = [0,1]$; Σ_X – борелевская (или лебеговская, безразлично) σ-алгебра; μ – мера Лебега; $Y = X^{[0,1]}$ – множество всех функций из $[0,1]$ в $[0,1]$; $\Sigma_Y = \Sigma_X^{[0,1]}$ – σ-алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами Y; $\rho = \mu^{[0,1]}$ – мера в Y, являющаяся прямым произведением мер μ (так что $(Y,\Sigma_Y,\rho) = (X,\Sigma_X,\mu)^{[0,1]}$; подробнее о несчетных произведениях вероятностных пространств см., например, [2]); $L_2 = L_2(Y,\Sigma_Y,\rho)$ – гильбертово пространство квадратично интегрируемых относительно ρ действительных функций на Y; $e_x \in L_2$: $e_x(y) = \sqrt{2}\cos\pi y(x)$ $(x\in X)$. Основой приводимых ниже примеров 1–3 является следующее предложение.

Лемма. *Для функции*

$$\nu\colon X\times\Sigma_Y\to[-1,1]:\nu(x,A)=(e_x,1_A)=\int_A e_x(y)\rho(dy) \tag{5}$$

справедливы включения $\nu\in M(X,Y)$, $|\nu|\in M(X,Y)$.

Доказательство. Так как $\{e_x : x\in X\}$ есть ортонормированная в L_2 система, то (неравенство Бесселя) для любого $A\in\Sigma_Y$ существует лишь счетное множество точек $x\in X$ таких, что $(e_x,1_A)\neq 0$. Отсюда сразу следует включение $\nu\in M(X,Y)$ и равенство

$$\nu\times\mu=0. \tag{6}$$

Пусть $A\in\Sigma_Y$. Тогда [2, III.3] существует множество $X_0=X_0(A)$ такое, что: 1) множество $X\setminus X_0$ счетно; 2) для любых $y,z\in Y$ справедлива импликация

$$(y\in A)\wedge\big(y(x)=z(x)\ \forall\, x\in X\setminus X_0\big)\implies z\in A. \tag{7}$$

Для точек $x_1,x_2\in X_0$ рассмотрим отображение $T\colon Y\to Y\colon Ty(x)=y(x)$, если $x\neq x_1$, $x\neq x_2$; $Ty(x_1)=y(x_2)$; $Ty(x_2)=y(x_1)$. Ясно, что отображение T измеримо. Представляя (Y,Σ_Y,ρ) в виде $(X,\Sigma_X,\mu)^2X^{[0,1]\setminus\{x_1\}\cup\{x_2\}}$ и пользуясь инвариантностью меры μ^2 при ортогональных преобразованиях квадрата (точнее: при отражениях относительно биссектрисы), получаем, что отображение T сохраняет меру ρ: $\rho(T^{-1}B)=\rho(B)$ $\forall\, B\in\Sigma_Y$, так что для индуцированной отображением T меры $T\rho$ справедливо равенство $T\rho=\rho$. Отсюда, из формулы замены переменных в интеграле, импликации (7) и включения $x_1,x_2\in X_0$ получаем

$$\begin{aligned}|\nu|(x_1,A)&=\int_A|e_{x_1}(y)|\rho(dy)=\int_A|e_{x_1}(y)|T\rho(dy)\\&=\int_{T^{-1}A}|e_{x_1}(Ty)|\rho(dy)=\int_A|e_{x_2}(y)|\rho\,dy=|\nu|(x_2A).\end{aligned}$$

Таким образом, функция $x\mapsto|\nu|(x,A)$ постоянна на множестве X_0 и, следовательно, измерима. Лемма доказана.

Пример 1. Возьмем переходную меру ν, определенную равенством (5). Для любого $x\in X$ имеем

$$|\nu|(x,Y)=\int_Y|e_x(y)|\rho(dy)=\sqrt{2}\int_0^1|\cos\pi t|\mu(dt)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}. \tag{8}$$

Если теперь $g\colon X\to[-\infty,\infty]$ есть функция, равная ∞ на множестве положительной μ-меры, то полагая $f\colon X\times Y\to[-\infty,\infty]$: $f(x,y)=g(x)$, из (6) получаем $\nu\times\mu$-интегрируемость f. Но в силу (8) заключение о $\nu(x,\,\cdot\,)$-интегрируемости функции $y\mapsto f(x,y)$ μ-почти при всех x неверно, т.е. нарушается первое утверждение теоремы Фубини.

Замечание. Вышеприведенная формулировка теоремы Фубини может быть изменена так, что требование $\nu\times\mu$-интегрируемости f ослаблено требованием ее $\overline{\nu\times\mu}$-интегрируемости (пространство $(X\times Y,\overline{\Sigma_X\times\Sigma_Y},\overline{\nu\times\mu})$ есть пополнение пространства $(X\times Y,\ \Sigma_X\times\Sigma_Y,\ \nu\times\mu)$ по мере $|\nu\times\mu|$, см. [1, §5, п. 4]). К такой измененной теореме возможно построение более содержательных контрпримеров. Именно, беря ν ту же, что и выше, и полагая последовательно $f(x,y)=1/y(x)$, $f(x,y)=(1/x)\cos\pi y(x)$, $f(x,y)=\cos\pi y(x)$ получим соответственно нарушение первого, второго и третьего утверждений теоремы.

Пример 2. Пусть $B \subset X$ есть какое-то неизмеримое множество. Положим $\nu\colon X\times\Sigma_Y \to [-1,1]$: $\nu(x,A) = 1_B(e_x, 1_A)$; так же, как и при доказательстве леммы получаем $\nu \in M(X,Y)$. С другой стороны (см. равенство (8)), $\{x \in X : |\nu|(x,Y) > 0\} = B$, так что функция $x \mapsto |\nu|(x,Y)$ неизмерима, т.е. не выполняется (3).

Пример 3. Опять возьмем ν, определенную равенство (5); в силу второго утверждения леммы мера $|\nu|\times\mu$ корректно определена. Теперь (8) дает равенство $|\nu|\times\mu(X\times Y) = 2\sqrt{2}/\pi$, а (6) – равенство $|\nu\times\mu| = 0$. Таким образом, не выполняется (4).

Замечание. Пусть (X,Σ_X), (Y,Σ_Y) – измеримые пространства, $\nu \in M(X,Y)$, $x \in X$, $A^+(x)$ – положительная часть разложения Хана для меры $\nu(x,\,\cdot\,) \in M(Y)$. Множество $A^+(x)$ определено с точностью до $|\nu|(x,\,\cdot\,)$-меры нуль. Пример 3 показывает, что, вообще говоря, нельзя для каждого $x \in X$ выбрать $A^+(x)$ так, чтобы выполнялось включение $\bigcup_x\{x, A^+(x)\} \in \Sigma_X\times\Sigma_Y$.

Перед следующим примером заметим, что если $\mu \in M^+(x)$, $\nu \in M^+(X,Y)$, то произведение $\nu\times\mu$ всегда корректно определено равенством (2) (интегралу "разрешено" принимать значение $+\infty$); при этом $\nu\times\mu \in M^+(X\times Y)$. Напомним еще, что мера $\rho \in M^+(Z)$ (Z – измеримое пространство) называется σ-ограниченной, если существует последовательность измеримых множеств $Z_n \subset Z$ такая, что $Z = \cup Z_n$ и для всех n $\rho(Z_n) < \infty$. Есть соответствующее определение и для векторных мер. В [1] (для векторного случая) требовалась σ-ограниченность мер $\nu(x,\,\cdot\,)$ $(\forall\, x \in X)$, $\nu\times\mu$. Естественен вопрос: вытекает ли σ-ограниченность $\nu\times\mu$ из σ-ограниченности $\nu(x,\,\cdot\,)$, μ?

Пример 4. Для $y \in Y$ обозначим через $\delta_y \in M^+(Y)$ меру (Дирака) единичной массы, сосредоточенную в точке y. Для $x \in X$ через $1_x \in Y$ обозначим индикаторную функцию одноточечного множества $\{x\}$. Пусть $\{r_n\}$ есть множество всех рациональных точек отрезка $[0,1]$. Положим $\nu\colon X\times\Sigma_Y \to [0,\infty]$: $\nu(x,A) = \sum_{n=1}^{\infty}\delta_{r_n 1_x}(A)$. Пусть $A \in \Sigma_Y$, $X_0 = X_0(A)$ – то же, что и в доказательстве леммы. Если $0 \in A$, то для всех $x \in X_0$, $n = 1,2,\dots$, выполняется включение $r_n 1_x \in A$, откуда $\nu(x,A) = \infty$. Если $0 \notin A$, то, аналогично, $\nu(x,A) = 0$ для всех $x \in X_0$. Таким образом, в обоих случаях функция $x \mapsto \nu(x,A)$ измерима, т.е. $\nu \in M^+(X,Y)$. Полагая для $x \in X$ $Y_n = \{y \in Y : y(x) = r_n\}$, $Y_0 = Y \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ видим, что $\nu(x,Y_0) = 0$, $\nu(x,Y_n) = 1$, так что мера $\nu(x,\,\cdot\,)$ σ-ограничена.

Пусть $B \in \Sigma_X\times\Sigma_Y$. Снова пользуясь результатом [2, III.3] (теперь применительно к пространству $(X\times X^{[0,1]}, \Sigma_X\times\Sigma_X^{[0,1]}))$, возьмем множество $X_0 \subset [0,1]$ со счетным дополнением такое, что сечение $S_x(B)$ не зависит от x при $x \in X_0$. Обозначая это общее сечение через $A \in \Sigma_Y$, получим равенство $\nu\times\mu(B) = \nu\times\mu(X\times A) = \int_0^1 \nu(x,A)\mu(dx)$. Но выше было найдено, что либо $\nu(x,A) = \infty$ μ-почти при всех x, либо $\nu(x,A) = 0$ μ-почти при всех x. Таким образом, либо $\nu\times\mu(B) = \infty$, либо $\nu\times\mu(B) = 0$, так что мера $\nu\times\mu$ не является σ-ограниченной.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Угланов А.В. Теорема Фубини для векторных мер // Матем. сб. 1990. Т. 181. №3. С. 423–432.
[2] Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.

Ярославский государственный университет

Поступило
11.04.94